

数学の雑記帳（情報基礎最終課題）

学籍番号：1720000 氏名：〇〇 □□

2017 年 x 月 xx 日

1 はじめに

このレポートでは数学の話題をいくつか取り上げて紹介する。第 2 節ではユークリッドの互除法を扱う。第 3 節では解析学の話題を扱う。第 4 節では数列の話題を扱う。第 5 節では知的財産権受講内容および感想を示し、第 6 節では本レポートで工夫した点を箇条書きする。

2 ユークリッドの互除法

整数 m が a を割り切ることを $m|a$ と書く。 a と b が 0 でない正の整数だったとき $d|a$ かつ $d|b$ そして $c|a$ かつ $c|b \Rightarrow c|d$ を満たす正の整数 d を a と b の最大公約数 (greatest common divisor) と言う。 a と b の最大公約数は $GCD(a, b)$ のように表す。

ユークリッドの互除法は 2 つの正の整数 a と b を与えられて最大公約数 $GCD(a, b)$ を求めるアルゴリズムである。何かの解を求める手続きをアルゴリズム (algorithm) と言う。具体的に 135 と 36 の最大公約数を求めてみよう。

ひとつの方法は両者を $135 = 3^3 \times 5$, $36 = 2^2 \times 3^2$ のように素因数分解して共通する 3^2 を見出し、 $GCD(135, 36) = 3^2 = 9$ とする方法である。

ユークリッドの互除法は名前の通り互いに割ることを繰り返す。図 1 に 135 と 36 のユークリッドの互除法を例示する。

はじめに大きい方の数 135 を小さい方の数 36 で割る。商は 3 となり、余りは 27 になる。次は除数として使った 36 を、余り 27 で割る。商は 1 で余りは 9 となる。次も除数として使った 27 を、新たな余り 9 で割る。商は 3 となり、割り切れる。割り切れたときに使った除数 9 が求める最大公約数である。

$$\begin{array}{r} 3 \\ 9 \overline{) 27} \\ \underline{27} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 36 \overline{) 27} \\ \underline{27} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 135 \overline{) 108} \\ \underline{108} \\ 27 \end{array}$$

図 1: ユークリッドの互除法の例

これで良いことを証明しておこう。正の整数 2 つ、 a と b を与えられて $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ の割り算を行った後は b と r の間で割り算を行っている。証明すべきは $GCD(a, b) = GCD(b, r)$ であることが分かる。今、 a と b の最大公約数が f だったとしよう。 a と b は適当な整数 j と k によって $a = jf$, $b = kf$ と表される。余りは $r = a - bq = jf - kfq = (j - kq)f$ と表され、余りも f の倍数であることが分かる。 f が b と r の公約数でもあることが分かったが、まだ最大公約数かは分からない。 b と r の最大公約数を g としよう。 f は b と r の公約数であることは分かっている、とりあえず、 $f \leq g$ が得られる。 g は b と r の最大公約数なので適当な整数 m と n によって $b = mg$, $r = ng$ と表される。このとき $a = bq + r = mgq + ng = (mq + n)g$ なので a も g の倍数であり、 g は a と b の公約数であることが分かった。 f は a と b の最大公約数だったので $g \leq f$ を得る。よって $f = g$ が得られる。 Q.E.D.

3 解析学の話題

ここでは解析学の話題として曲座標と部分積分を扱う。

3.1 極座標

平面上に点 O と半直線 OX を定めると、点 P の位置は点 O からの距離 r と OX から OP までの角度 θ で定まる。2 つの実数の組み (r, θ) を極座標といい、点 O を極という。

図 2 に下記の式を満たす曲線を示す。

$$r = 2(1 + \cos \theta) \quad (1)$$

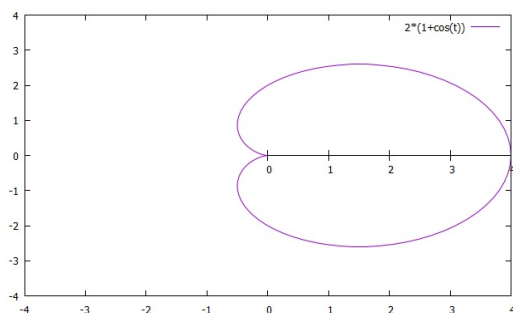


図 2: カージオイド

表 1 に主要な点の座標を示す。

表 1: 主要な点の座標

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
r	4	$2 + \sqrt{2}$	2	$2 - \sqrt{2}$	0

式 (1) において

$$2(1 + \cos(-\theta)) = 2(1 + \cos \theta)$$

なので $-\pi \leq \theta \leq 0$ の範囲は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲と x 軸について対称である。

3.2 部分積分

以下の公式を用いて左辺の積分を計算する方法を部分積分という

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (2)$$

積の微分公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (3)$$

を以下の不定積分に戻した関係が式 (2) に他ならない。

$$\int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) + C$$

4 数列の話題

5 知的財産権受講の感想

6 レポート作成で工夫した点

参考文献

[1] Web ページタイトル, URL, 検索した日付け。

[2] 著者, タイトル, 出版社, 発行年。